Teoria dell'unificazione

- componente essenziale di
  - programmazione logica
  - inferenza dei tipi
  - anche sistemi di riscrittura
  - …
- algoritmo di unificazione
  - importante
  - elegante!

Termini e Universo di Herbrand

- alfabeto del linguaggio $L\ \{C, F, V\}$
  - (simboli di) costanti, funzioni, variabili
    - se C è vuoto, lo consideriamo formato da una costante arbitraria
      - con la notazione Prolog, simboli che iniziano con maiuscola sono variabili
      - gli altri sono costanti e funzioni
- termine
  - una variabile X
  - una costante c
  - l'applicazione di una funzione n-aria ad n termini $f^n(t_1, \ldots, t_n)$
  - non esistono altri termini
- $vars(\sigma)$ denota l'inieme delle variabili che compaiono in σ
  - per qualunque oggetto sintattico σ
- termine ground
  - un termine che non contiene variabili
- Universo di Herbrand U_L
  - l'insieme di tutti i termini ground

Equazioni e sostituzioni

- equazione $t_1 = t_2$
  - t_1 e t_2 termini
- sostituzione ϑ: un insieme finito della forma

  $\{v_1 \leftarrow t_1, \ldots, v_n \leftarrow t_n\}$
  - v_i è una variabile
  - t_i è un termine diverso da v_i
  - le variabili v_i, $i=1,\ldots,n$ sono fra loro distinte
  - $dominio(\vartheta) = \{v_1, \ldots, v_n\}$
  - $rango(\vartheta) = \text{vars}(\{t_1, \ldots, t_n\})$
- una sostituzione è una funzione da variabili a termini
  - sostituzione vuota ε
  - la sostituzione è ground se tutti i t_i sono ground

Applicare le sostituzioni

- $\vartheta=\{v_1 \leftarrow t_1, \ldots, v_n \leftarrow t_n\}$ sostituzione
- E un qualunque costrutto sintattico (termine, atomo, equazione, insiemi di …)

- l'applicazione di ϑ ad E è l'espressione ottenuta da E sostituendo simultaneamente ogni occorrenza di v_i, $i=1,\ldots,n$ con t_i
- il risultato della applicazione è denotato da $E\vartheta$
  - è una istanza di E
  - la sostituzione ϑ è grounding per E se $E\vartheta$ è ground

Soluzioni di insiemi di equazioni

- $E = \{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}$ insieme di equazioni
  - una soluzione ϑ di E è una sostituzione grounding per E tale che
    $$s_1\vartheta \equiv t_1\vartheta, \ \ldots, \ s_n\vartheta \equiv t_n\vartheta$$
    - con $\equiv$ identità sintattica
  - l'insieme delle soluzioni di E è denotato da $soln(E)$
  - E è risolubile se $soln(E) \neq \Phi$
  - E è banale se ogni sostituzione grounding per E è una soluzione
  - due insiemi di equazioni E_1, E_2 sono equivalenti $(E_1 \approx E_2)$ se $soln(E_1) = soln(E_2)$

Insiemi di equazioni risolti

- un insieme di equazioni

  $$E = \{v_1 = t_1, \ldots, v_n = t_n\}$$

  è risolto, se tutti i v_i sono variabili distinte che non compaiono in nessuno dei t_j
- $elim(E) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ delle variabili eliminabili
- $param(E)$ è l'insieme delle variabili non eliminabili (parametri)

- assegnando termini ground ai parametri si ottiene una soluzione unica
- tutte le soluzioni possono essere ottenute in questo modo

Algoritmo di unificazione 1

- il primo algoritmo (1965) è dovuto a Robinson
- quello che presentiamo si basa sull'idea originale di Herbrand (1930), ripresa nell'algoritmo di Martelli&Montanari (1982)
- trasformazione di un qualunque insieme di equazioni in un insieme risolto equivalente
  - se l'insieme non è risolubile, l'algoritmo termina con *fallimento*
- si chiama unificazione, perché gli insiemi risolti sono molto simili agli unificatori (vedi dopo)

Algoritmo di unificazione

- scegliere in modo non-deterministico una equazione dall'insieme e compiere una delle azioni seguenti (determinate dalla forma della equazione)
  1. $f(t_1,\ldots,t_n)=f(s_1,\ldots,s_n)$
     rimpiazza l'equazione con le equazioni
     $t_1=s_1\ldots,t_n=s_n$
  2. $f(t_1,\ldots,t_n)= g(s_1,\ldots,s_m),\ f \neq g$
     termina con *fallimento*
  3. $X = X$ elimina l'equazione
  4. $t = X,\ t$ non variabile
     rimpiazza l'equazione con l'equazione $X = t$
  5. $X = t,\ t \neq X,\ X$ ha almeno un'altra occorrenza nell'insieme
     se X compare in t termina con *fallimento,*
     altrimenti rimpiazza X con T in tutte le altre equazioni
- terminazione con fallimento, oppure con successo quando nessuna delle azioni risulta più applicabile

Unificazione: un esempio

- $E = \{\ g(X)=g(g(Z)),\ f(a,Z)= f(a,Y)\ \}$
- $\{\ X=g(Z),\ f(a,Z)= f(a,Y)\ \}$
- $\{\ X=g(Z),\ a = a,\ Z = Y\ \}$
- $\{\ X=g(Z),\ Z = Y\ \}$
- $\{\ X=g(Y),\ Z = Y\ \}$
- terminazione con successo

Unificazione: terminazione

- (1, 3) nei passi 1 e 3 diminuisce in modo stretto il numero totale di occorrenze di simboli di funzione e di variabile a sinistra
  - *possono essere eseguiti un numero finito di volte*
- (4) il passo 4 può essere eseguito un numero finito di volte prima di eseguirne un altro e non fa aumentare il numero totale di simboli
- (1, 3, 4) dopo un numero finito di esecuzioni dei passi 1, 3 e 4, l'algoritmo termina oppure si applica il passo 5
- (5) termina con *fallimento* oppure elimina tutte le occorrenze destre di una variabile
  - *al massimo una volta per ogni variabile*

Unificazione: equivalenza

- (1) $f(u) = f(v)$ ha le stesse soluzioni di $u = v$
  - *identità sintattica*
- (5) se $X = t$, possiamo rimpiazzare X con t in altre equazioni senza influenzare l'insieme di soluzioni
  - *uguaglianza matematica*

Unificazione: fallimento

- se l'algoritmo fallisce, l'insieme di equazioni E non ha soluzioni
  - l'insieme E' a cui applichiamo i passi 2 o 5 è equivalente ad E
  - l'equazione $f(t_1, \ldots, t_n) = g(s_1, \ldots, s_m)$, $f \neq g$ non ha soluzioni
  - l'equazione $X = t$, $t \neq X$, X compare in t non ha soluzioni
    - l'applicazione di una qualunque sostituzione grounding genera due termini di cui quello destro è strettamente più grande

Unificazione: successo

- se l'algoritmo termina con successo, l'insieme di equazioni risultanti E' è risolto
  - tutti i termini sinistri sono variabili, altrimenti potrei eseguire uno dei passi 1, 2 o 4.
  - tutte le variabili sono distinte e non compaiono a destra in nessuna altra equazione, altrimenti potrei applicare il passo 5

Insiemi risolti equivalenti

- ogni insieme di equazioni *E* risolubile ha un insieme risolto equivalente *E'*
- *E'* non è unico
  - vedi nondeterminismo nell'algoritmo

  ma insiemi risolti equivalenti sono tra loro isomorfi
  - uguali a parte lo scambio di variabili eguagliate da una equazione

Unificatori

- due termini t_1 e t_2 sono unificabili, se esiste una sostituzione α, tale che $t_1\alpha \equiv t_2\alpha$
  - α è un unificatore di t_1 e t_2
  - se t_1 e t_2 sono unificabili, l'equazione $t_1 = t_2$ è risolubile
- un unificatore di un insieme di equazioni

  $E = \{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}$ è una sostituzione ϑ tale che $s_1\vartheta \equiv t_1\vartheta, \ldots, s_n\vartheta \equiv t_n\vartheta$
  - ogni soluzione di E è un unificatore di E
- *unif(E)* denota l'insieme degli unificatori di E

Composizione di sostituzioni

- $\vartheta_1=\{X_1 \leftarrow t_1, \ldots, X_n \leftarrow t_n\}$
  $\vartheta_2=\{Y_1 \leftarrow s_1, \ldots, Y_m \leftarrow s_m\}$
- $\vartheta_1 \bullet \vartheta_2$ è la sostituzione ottenuta togliendo da
  $\{X_1 \leftarrow t_1\vartheta_2, \ldots, X_n \leftarrow t_n\vartheta_2, Y_1 \leftarrow s_1, \ldots, Y_m \leftarrow s_m\}$
  1. gli elementi della forma $X_j \leftarrow X_j$
  2. quelli della forma $Y_k \leftarrow s_k$, con $Y_k \equiv X_j$
- proprietà della composizione
  1. $t(\vartheta_1 \bullet \vartheta_2) = (t\vartheta_1)\vartheta_2$
  2. $t(\vartheta_1 \bullet (\vartheta_2 \bullet \vartheta_3)) = t((\vartheta_1 \bullet \vartheta_2) \bullet \vartheta_3)$
  3. una sostituzione ϑ è idempotente,

     $$\vartheta = \vartheta \bullet \vartheta$$

     se e solo se $dominio(\vartheta) \cap rango(\vartheta) = \Phi$

Unificatore più generale (mgu)

- ϑ_1 è più generale di ϑ_2 ($\vartheta_2 \leq \vartheta_1$), se
  $\exists\alpha \,.\ \vartheta_2 = \vartheta_1 \bullet \alpha$
- unificatore più generale (most general unifier, mgu) di un insieme di equazioni *E* (secondo Chang&Lee 73):

  un unificatore μ tale che

  $\vartheta \in unif(E) \Leftrightarrow \exists\alpha \,.\ \vartheta = \mu \bullet \alpha$
  - è più generale di ogni altro unificatore
  - non è necessariamente idempotente
- mgu secondo Robinson: mgu secondo Chang&Lee idempotente
  - quello calcolato dal suo algoritmo

Mgu idempotenti ed insiemi risolti

- $\vartheta=\{X_1 \leftarrow t_1, \ldots, X_n \leftarrow t_n\}$ sostituzione idempotente
- $eqn(\vartheta)= \{X_1= t_1, \ldots, X_n= t_n\}$ è un insieme di equazioni risolto

❧ mgu idempotenti ed insieme di equazioni risolti sono essenzialmente la stessa cosa

❧ se ϑ_1 e ϑ_2 sono due mgu idempotenti dello stesso insieme di equazioni E, esiste una sostituzione (ridenominazione)
$\alpha = \{X_1 \leftarrow Y_1, \ldots, X_k \leftarrow Y_k, Y_1 \leftarrow X_1, \ldots, Y_k \leftarrow X_k\}$
tale che $\{X_1 \leftarrow Y_1, \ldots, X_k \leftarrow Y_k\} \subseteq \vartheta_1$ e
$\vartheta_2 = \vartheta_1 \bullet \alpha$

Teorema di Unificazione di Robinson

- esiste un algoritmo che, dati due termini t_1 e t_2 calcola il loro mgu, se sono unificabili, e termina con fallimento altrimenti

1. si costruisce l'insieme di equazioni $E = \{t_1 = t_2\}$
   tutti gli unificatori di t_1 e t_2 sono unificatori di E
2. si applica l'algoritmo per trasformare E in forma risolta. Se l'algoritmo fallisce, terminiamo con fallimento. Altrimenti, se E' è l'insieme risolto calcolato, definiamo ϑ tale che $eqn(\vartheta) = E'$
   gli mgu idempotenti sono in corrispondenza biunivoca con gli insiemi risolti
3. ϑ è unico, salvo "ridenominazione"