# Un po' di ripasso di logica

- necessaria per discutere la programmazione logica

- linguaggi del prim'ordine: sintassi e semantica
- calcolo dei predicati del prim'ordine: completezza
- teorie del prim'ordine e deduzione automatica

# Sintassi 1

- alfabeto $\{C, F, P, V\}$
  - (simboli di) costanti, funzioni, predicati, variabili
- termine
  - una variabile $X$
  - una costante $c$
  - l'applicazione di una funzione $n$-aria ad $n$ termini $f^n(t_1,\ldots,t_n)$
  - non esistono altri termini
- atomo
  - l'applicazione di un predicato $n$-ario ad $n$ termini $P^n(t_1,\ldots,t_n)$

# Sintassi 2

- formula ben formata (fbf)
  - un atomo
  - $\sim f$, se $f$ è una fbf
  - $f_1 \wedge f_2, f_1 \vee f_2, f_1 \supset f_2\, f_1 \equiv f_2$ se $f_1$ e $f_2$ sono fbf
  - $(\forall X)f$, $(\exists X)f$ se $f$ è una fbf
  - non esistono altre fbf

- formula chiusa
  - se tutte le occorrenze di variabile compaiono nello scopo di un quantificatore per quella variabile

# Semantica

- interpretazione *I*
  - insieme non vuoto *D* (dominio)
  - assegnamento a costanti, funzioni e predicati
    - di elementi di *D*, funzioni da $D^n$ a *D*, relazioni su $D^n$
- valutazione di una formula chiusa *f* in *I*
  - se è noto il valore di verità di *g* ed *h*
    - il valore delle formule contenenti i 5 operatori logici si ricavano dalle relative tabelle di verità
    - la formula $(\forall X)g$ è vera se *g* è vera per ogni elemento di *D*
    - la formula $(\exists X)g$ è vera se *g* è vera per almeno un elemento di *D*
- *I* è un **modello** di *f* se e solo se *f* è vera in *I*

# Calcolo dei predicati del prim'ordine

- 5 (schemi di) fbf = **assiomi logici**
- 2 **regole di inferenza**
  - $B$ segue da $A$ e da $A \supset B$ (modus ponens)
  - $(\forall X)A$ segue da $A$ (generalizzazione)
- **dimostrazione**
  - una sequenza di fbf $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tale che ogni $A_i$
    - è un assioma, oppure
    - è derivata applicando una regola di inferenza a fbf (e assiomi) che la precedono
- **teorema**
  - l'ultima fbf di una dimostrazione

# Calcolo dei predicati del prim'ordine

- semantica
  - gli assiomi logici sono veri in tutte le interpretazioni
    - tutte le interpretazioni sono modelli del calcolo
- completezza di Godel
  - i teoremi sono esattamente le formule valide
    - le formule derivabili dagli assiomi (sintatticamente) sono esattamente quelle valide (significative dal punto di vista semantico)

# Teorie del prim'ordine

- in aggiunta agli assiomi logici
  - assiomi propri (fbf chiuse)
- modelli della teoria *A*
  - interpretazioni in cui gli assiomi sono veri
- conseguenza logica
  - una fbf *f* è conseguenza logica di *A* se ogni modello di *A* è anche modello di *f*
  - completezza
    - i teoremi di una teoria sono esattamente le sue conseguenze logiche
- deduzione automatica
  - metodi sintattici (operazionali) per determinare le conseguenze logiche

# Dimostrazioni "per assurdo"

- conseguenza logica
  - una fbf $f$ è conseguenza logica di $A$ se ogni modello di $A$ è anche modello di $f$
  - sse $A \cup \sim f$ è insoddisfacibile
    - i modelli di $A$ sono anche modelli di $f$ e quindi non di $\sim f$

# Formule ben formate e clausole

- clausola
  - una disgiunzione di atomi o negazione di atomi $A_1 \vee \ldots \vee A_n \vee \sim B_1 \vee \ldots \vee \sim B_m$
  - tutte le variabili sono implicitamente quantificate universalmente
- un insieme di formule ben formate *F* può essere trasformato in un insieme di clausole *C* (skolemizzazione)
  - *F* è insoddisfacibile se e solo se *C* è insoddisfacibile

# Interpretazioni di Herbrand

- Universo di Herbrand *U*
  - l’insieme di tutti i termini ground
- Base di Herbrand *B*
  - l’insieme di tutti gli atomi ground
- Interpretazione di Herbrand *I*
  - un qualunque sottoinsieme di *B*
    - gli atomi ground che sono veri
  - interpretazioni definite su un dominio "sintattico" (*U*)
    - costanti, funzioni e predicati sono interpretati "in modo libero"

# Clausole e Interpretazioni di Herbrand

- ogni insieme consistente di clausole C ha un modello di Herbrand
  - un insieme di clausole C è insoddisfacibile se e solo se non ha modelli di Herbrand
- una metodologia di dimostrazione
  - $f$ è conseguenza logica di $S$
  - $S \cup \sim f$ è insoddisfacibile
  - (trasformo $S \cup \sim f$ nell'insieme $C$ di clausole) $C$ è insoddisfacibile
  - $C$ non ha modelli di Herbrand

# Il metodo di Risoluzione 1 (Robinson)

- dimostra l'insoddisfacibilità di un insieme di clausole *C* derivando da *C* la clausola vuota $\square$ (contraddizione), usando una sola regola di inferenza (il principio di risoluzione)
- date due clausole

  $A_1 \vee \ldots \vee A_n \vee \sim B_1 \vee \ldots \vee \sim B_m$

  $C_1 \vee \ldots \vee C_k \vee \sim D_1 \vee \ldots \vee \sim D_h$

  se esiste una sostituzione $\theta$ tale che $A_i\theta = D_j\theta$, il risolvente è

  $A_1\theta \vee \ldots \vee A_{i-1}\theta \vee A_{i+1}\theta \vee \ldots \vee A_n\theta \vee \sim B_1\theta \vee \ldots \vee \sim B_m\theta \vee$

  $C_1\theta \vee \ldots \vee C_k\theta \vee \sim D_1\theta \vee \ldots \vee$

  $\sim D_{j-1}\theta \vee \sim D_{j+1}\theta \vee \ldots \vee \sim D_h\theta$

# Il metodo di Risoluzione 2

- la sostituzione θ tale che $A_i\theta=D_j\theta$ è l'mgu (most general unifier) calcolato con l'algoritmo di unificazione (vedi dopo)
  - usare l'mgu invece che una qualunque sostituzione unificante è la furbizia del metodo di risoluzione
- resta comunque computazionalmente intrattabile
  - ricerca di strategie "complete"

# Un po' di ripasso di algebra

- necessaria per discutere la semantica denotazionale
  - e da riprendere quando parleremo di interpretazione astratta

- reticoli
- operatori su reticoli
- punti fissi e teoremi relativi
- calcolare un punto fisso

# Ordinamento parziale

- una relazione binaria su un insieme S è un *ordinamento parziale*, se gode delle proprietà *riflessiva, antisimmetrica e transitiva*
- (S, ≤), con ≤ ordinamento parziale su S

  $X \subseteq S$, $a \in S$

- a è un *limite superiore* (upper bound) di X, se $\forall x \in X$, $x \leq a$
- a è un *limite inferiore* (lower bound) di X, se $\forall x \in X$, $a \leq x$
- a è il *minimo limite superiore* (least upper bound) di X, se
  - a è un limite superiore di X
  - $\forall$ b limite superiore di X, $a \leq b$
- a è il *massimo limite inferiore* (greatest lower bound) di X, se
  - a è un limite inferiore di X
  - $\forall$ b limite inferiore di X, $b \leq a$
- il minimo limite superiore ed il massimo limite inferiore, se esistono, sono unici e si indicano con lub(X) e glb(X)

# Reticolo completo

- un insieme parzialmente ordinato $(S, \leq)$ è un reticolo completo

  se $\forall X \subseteq S$ esistono lub(X) e glb(X)
  - T denota lub(S) (massimo del reticolo)
  - $\perp$ denota glb(S) (minimo del reticolo)

- $X \subseteq S$ è un *diretto*

  se ogni sottoinsieme finito di X ha un limite superiore in X

# Operatori su reticoli completi: monotonicità e continuità

- una funzione sul reticolo completo $(S, \leq)$

  $\varphi: S \rightarrow S$ (*operatore* su S)
- $\varphi$ è *monotono* se

  $\varphi(x) \leq \varphi(y)$, quando $x \leq y$
- $\varphi$ è *continuo* se

  $\varphi(lub(X)) = lub\,\{\varphi(x): x \in X\}$, $\forall X$ diretto di S
- se $\varphi$ è continuo, è anche monotono

# Minimo punto fisso

- $(S, \leq)$ reticolo completo
  $\varphi: S \rightarrow S$ operatore su S

- $a \in S$ è il *minimo punto fisso* (least fixpoint, lfp) di $\varphi$ se
  - a è un punto fisso di $\varphi$, cioè $\varphi(a) = a$
  - $\forall$ b punto fisso di $\varphi$, $a \leq b$

# Il teorema di Tarski

- se $(S, \leq)$ è un reticolo completo e
  $\varphi: S \rightarrow S$ è un operatore *monotono* su S,
  allora $\varphi$ ha un minimo punto fisso $lfp(\varphi)$ e
  $lfp(\varphi) = glb\ \{ x: \varphi(x) = x \}$

- il teorema ci dice che $lfp(\varphi)$ esiste ed è il massimo limite inferiore dell'insieme dei punti fissi di $\varphi$
- per ottenerne una caratterizzazione costruttiva abbiamo bisogno di ipotesi più forti e dobbiamo ricorrere alle *potenze ordinali*

# Le potenze ordinali

- i numeri ordinali (rappresentati come insiemi, ciascuno contiene tutti i precedenti)
- ordinali finiti:

  $0 = \Phi$; $1 = \{\Phi\}$; $2 = \{\Phi,\{\Phi\}\}= \{0, 1\}$; ...
- ordinali transfiniti:

  $\omega = \{0, 1, 2, 3, ......\}$; ... ; $\alpha$ ; ....; $\beta$; ....

  $\alpha < \beta$, se $\alpha \in \beta$
- $(S, \leq)$ reticolo completo, $\varphi$ operatore *monotono* su S

  $\varphi\uparrow 0 = \perp$

  $\varphi\uparrow(n+1) = \varphi(\varphi\uparrow n)$

  $\varphi\uparrow\omega = \text{lub } \{\varphi\uparrow n \mid n < \omega \}$

  $\varphi\uparrow(\alpha) = \varphi(\varphi\uparrow(\alpha\text{-}1))$

# Il teorema di Kleene

- se $(S, \leq)$ è un reticolo completo e
  $\varphi: S \rightarrow S$ è un operatore *continuo* su S,
  allora $lfp(\varphi) = \varphi\uparrow\omega$

- se l'operatore $\varphi$ è continuo il suo minimo punto fisso $lfp(\varphi) = \varphi\uparrow\omega = lub\ \{\varphi\uparrow n \mid n < \omega\}$ può essere calcolato come il lub dell'insieme di tutte le iterazioni finite di $\varphi$, a partire dall'elemento minimo del reticolo $\perp$
  - naturalmente non si può calcolare effettivamente perché sono necessarie $\omega$ iterazioni

# Minimo punto fisso: a che serve?

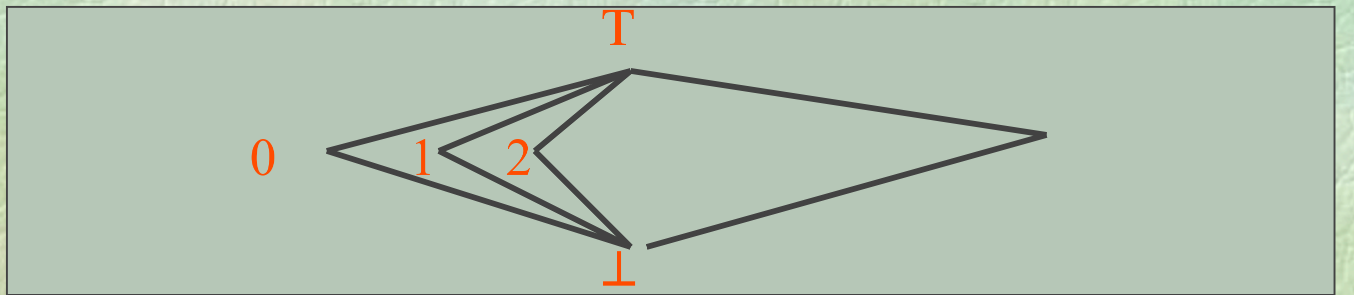
- per dare un significato alle definizioni ricorsive
  - in particolare, a funzioni parziali definite ricorsivamente
- vediamo un semplice esempio
  - definizione ricorsiva di una funzione parziale (il solito fattoriale) da interi a interi

$$fact = \lambda x.\ \text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } x * fact\ (x-1)$$

# Esempio di lfp: i reticoli

fact = λx. if x=0 then 1 else x * fact (x-1)

- **il reticolo completo ($\mathcal{Z}$, ≤) degli interi**




- **il reticolo completo ($\mathcal{F}$, $\leq_f$) delle funzioni parziali da $\mathcal{Z}$ a $\mathcal{Z}$**
- $f_1 \leq_f f_2$ se $\forall x \in \mathcal{Z}$, $f_1(x) \leq f_2(x)$
- $\perp_f$ è la funzione che restituisce sempre $\perp$
- $T_f$ è la funzione che restituisce sempre T

# Esempio di lfp: il funzionale

fact = $\lambda$x. if x=0 then 1 else x * fact (x-1)

- la definizione ricorsiva va intesa come
  - definizione di un operatore $\varphi_{fact}$ (continuo) su $\mathcal{F}$ (funzionale)

    $\varphi_{fact} = \lambda f.\ \lambda x.$ if x=0 then 1 else x * f (x-1)
  - di cui la funzione definita fact è il minimo punto fisso

    fact = lfp($\varphi_{fact}$ )
- lfp($\varphi_{fact}$ ) può essere “calcolato”, in accordo con il teorema di Kleene

# Esempio : un po' di "calcolo"

$\varphi_{fact} = \lambda f.\ \lambda x.$ if $x=0$ then 1 else $x * f(x-1)$

fact = lfp($\varphi_{fact}$ )

$\varphi_{fact} \uparrow 0 = \bot_{\mathbf{f}}$

$\varphi_{fact} \uparrow 1 = \varphi_{fact}(\varphi_{fact} \uparrow 0) = \varphi_{fact}(\bot_{\mathbf{f}}) = \lambda x.$ if $x=0$ then 1 else $\bot$

$\varphi_{fact} \uparrow 2 = \varphi_{fact}(\varphi_{fact} \uparrow 1) = \lambda x.$ if $x=0$ then 1 else
$x *$ (if $x-1=0$ then 1 else $\bot$)

$\varphi_{fact} \uparrow 3 = \lambda x.$ if $x=0$ then 1 else
$x *$ (if $x-1=0$ then 1 else
$(x-1) *$ (if $x-2=0$ then 1 else $\bot$))

.............